數學傳播 50卷1期, pp. 55-67

從 $\sqrt{2}$ 談起
—謹以此文紀念元老 (1930~2021)

林開亮

一、前言

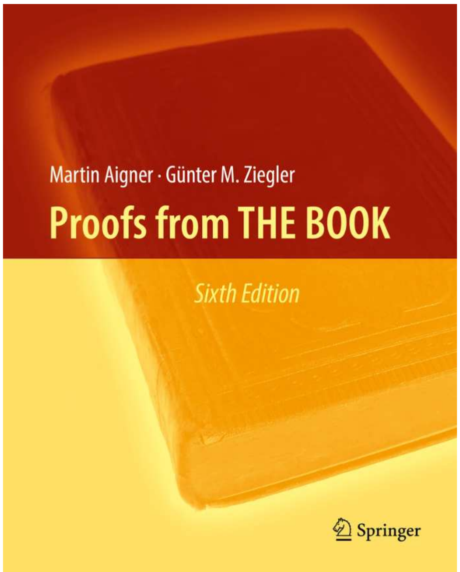
數論有悠久的歷史。在西元前 300 年左右, 古希臘數學家歐幾里得編纂《幾何原本》十三卷, 其中涉及數論的有四卷, 分別是第七、八、九、十卷。在第七卷有求兩個正整數最大公因數的歐幾里得演算法、還有關於質數整除性質的歐幾里得定理 (若 $p\mid ab$, 則 $p\mid a$ 或 $p\mid b$), 第九卷有質數無窮的敘述與證明, 第十卷 (全書最重要的部分) 則有 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明。參見 Kline 的《古今數學思想》[16] 第 4 章。

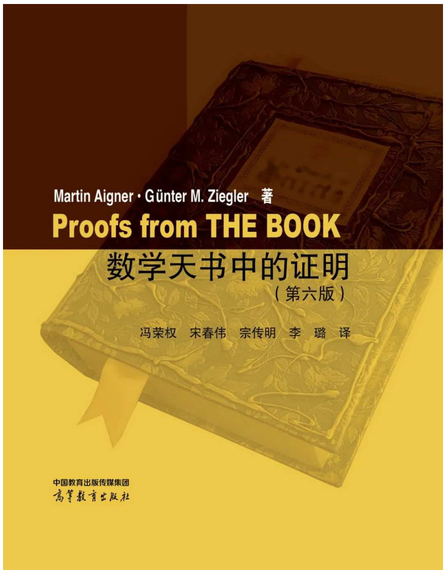
無理數的發現(通常歸功於畢達哥拉斯學派), 在整個數學史上都是光輝的一頁。我們的故事也是從 $\sqrt{2}$ 的無理性引出的。事實上, 古希臘人對 $\sqrt{2}$ 是無理數的表述, 是用幾何語言。

歐幾里得如是說:「正方形的對角線與邊長不可公度」。(所謂兩個量可以公度, 就是說其比值可以表示爲兩個正整數之比。歐幾里得證明了更一般的結論, 若 n 不是完全平方數, 則 $\sqrt{n}$ 不可公度。) 它等價於下述關於 Diophantine 方程的結果: $a^2=2b^2$ 沒有正整數解。在這個形式下, 考慮奇偶性, 用反證法很容易證明結論。

20世紀著名的英國數學家 G. H. Hardy 寫過一本膾炙人口的小書《一個數學家的辯白》[12], 舉了兩個例子以說明什麼是“真正的”數學定理— 即每個數學家都會承認是第一流的那些定理。這兩個例子分別是質數無窮(證明歸功於歐幾里得) 與 $\sqrt{2}$ 的無理性(證明歸功於畢達哥拉斯)。值得注意的是, 這兩個定理的經典證明, 都是用反證法。它們是如此經典, 幾乎出現在每一本涉及數論的科普書中。甚至中國科學院的張景中院士寫了一本科普書, 名字就叫《從 $\sqrt{2}$ 談起》。

說到數學科普書, 有一本是引人注目的。這就是奧地利數學家 M. Aigner 和德國數學家 G. M. Ziegler 編纂的 Proofs from the Book, 中譯本叫《數學天書中的證明》[1]。這本書的靈感源於 20 世紀著名的數學家 Paul Erdős, 他常常說:「這是一本無窮無盡的書, 包括了所有絕妙的定理和精彩的證明。遺憾的是, 這本書由上帝拿著, 他看我們不順眼, 只在極其難得的機會出現時, 才准許我們看一眼(所謂“此曲只應天上有, 人間哪得幾回聞?”)。而一旦這種機會到來時, 我們就會一飽眼福, 瞥見數學的美。」參見[5, pp.219–220] 因此, 中國科學院數學院嚴加安院士爲中譯本題詞“天成之證”(所謂“文章本天成, 妙手偶得之”), 他建議再版時把書名譯





爲“數學天成之證”。順便提一句, 王元院士和中國科學院數學所的數學史專家李文林教授曾經合譯了 Erdős 的傳記《我的大腦敞開了》[29]。

Proofs from the Book 曾獲得美國數學會 2018 年度的數學闡述類的 Leroy P. Steele 獎。書中分五個部分, 分別是數論、幾何、分析、組合和圖論, 彙集了歷史上許多精彩優美的證明。比如組合部分, 收入了 Erdős–Ko–Rado 定理 (1938年), 其中 Ko 是中國數學家柯召 (Chao Ko), 而 Rado 是英國數學家 Richard Rado。再如數論部分的開篇, 對質數無窮, 給出了六個不同的證明。這一部分也談到了無理數, 主要是證明 π 的無理性。實際上, 從 $\sqrt{2}$ 的無理性出發, 也可以引出極精彩的故事。這就是我們接下來要跟諸位分享的。

1983 年, 正是 Erdős 與陳省身 (與華羅庚比肩而立的中國數學家, 如王元院士 [36] 所洞察到的, 陳先生對數論也情有獨鍾) 同時獲得 Wolf 數學獎的那一年, 加拿大數學家 E. J. Barbeau 在美國數學協會的期刊《數學雜誌》上發表了一篇文章 [2], 試圖將 $\sqrt{2}$ 的無理性推廣。他試圖回答下述問題:

問題 1. 設 $n \geqslant 4$, 正 n 邊形的兩條不等長的廣義對角線 (包括邊長在內) 之比是否爲有理數?

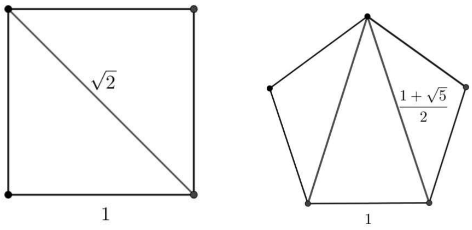


圖 1: 左: 正方形中的無理比例 $\sqrt{2}$; 右: 正五邊形中的無理比例 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

注意, $n=5$ 時, 正五邊形的對角線與邊長之比恰好是黃金比例 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 這也許是最引人注目的一個無理數。其倒數 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 一般稱爲黃金分割數, 它恰好是斐波那契數列前後兩項之比的極限。

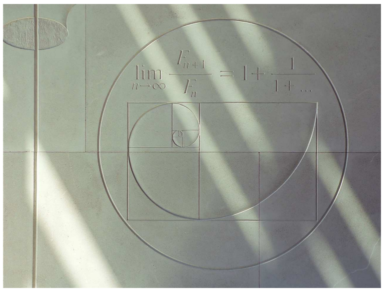


圖 2: 鐫刻在紐約州立大學石溪分校 Simons 幾何物理中心“象牙牆”(Iconic Wall) 上的 32 個優美方程之一, 見 https://scgp.stonybrook.edu/archives/6264

華羅庚與王元的一項著名工作 [13], 本質上就是從數論的角度推廣了這個密切聯繫並應用於高維數值積分。也參見他們二位編寫的《數學模型選談》[14] 第五章“黃金數與數值積分”或《華羅庚》[34] 第 274 頁“高維數值積分”。

對這個問題, Barbeau 只得到部分結果。通過將正多邊形的頂點座標化爲單位根, 並利用餘弦定理, 問題 1 可以描述如下。

問題 2. 設正整數 $n \geqslant 4$, k_1, k_2 滿足 $k_1 < k_2 \leqslant \frac{n}{2}$。問: 在滿足以上條件的三元陣列$(n, k_2, k_1)$中, 有哪些使得比值

$$\frac{\sin\frac{k_2\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}} \tag{1}$$

爲有理數?

Barbeau 證明了, (i) 在 $(k_1, k_2) = (1, 2)$ 的情形, 比值 (1) 總是無理數; (ii) 在 $(k_1, k_2) = (1, 3)$ 且 $n \geqslant 7$ 的情形, 比值 (1) 總是無理數。

事實上, Barbeau 的問題的答案, 已經蘊含在 R. J. Evans 和 I. M. Isaacs 1977 年的一篇文章 [10], 而且等價的結果在歷史上反覆多次出現。我們概述如下。

定理 1 (Evans–Isaacs, 1977; McMullen, 2006; Lin, 2021; Vincenzi–Paolillob–Rizzo, 2021)**.** 設正整數 k_1, k_2, n 滿足 $k_1 < k_2 \leqslant \frac{n}{2}$ 且 $\gcd(n, k_1, k_2) = 1$, 則

$$\alpha = \frac{\sin\frac{k_2\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}} \in \mathbb{Q} \iff (n, k_2, k_1) = (6, 3, 1),$$

而且此時比值 $\alpha = 2$。

據此可以得出, 對任意的正 n 邊形 $(n \geqslant 4)$, 其任意兩條不等長的廣義對角線之比都是無理數, 唯一的例外是正 $6m$ $(m \geqslant 1)$ 邊形中出現的比值 2。這就給出了問題 1 的一個簡單得驚人的完整回答!

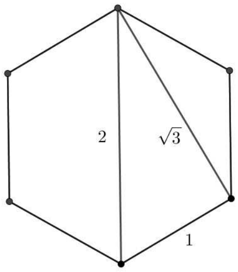


圖 3: 正六邊形中的有理比例: 直徑與邊長之比爲 2。

事實上, 與定理 1 等價的餘弦、正切結果也曾反覆出現 (正餘弦結果的等價性是因爲有 $\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$, 正弦與正切的等價性並不顯然, 這一點是山東大學李良攀教授向作者指出的, 參見 [20, p. 64] 末行的等式):

定理 2 (Robinson,1996; Berger,2017;Lin, 2021)**.** 設正整數 n, k_1, k_2 滿足 $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$ 且 $\gcd(n, k_1, k_2) = 1$, 則

$$\beta = \frac{\cos\frac{k_2\pi}{n}}{\cos\frac{k_1\pi}{n}} \notin \mathbb{Q}。$$

定理 3 (Shapiro,1984; 蔡進一等, 2018;Lin, 2021)**.** 設正整數 k_1, k_2, n 滿足 $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$ 且 $\gcd(n, k_1, k_2) = 1$, 則

$$\gamma = \frac{\tan\frac{k_2\pi}{n}}{\tan\frac{k_1\pi}{n}} \in \mathbb{Q} \iff (n, k_2, k_1) = (6, 2, 1),$$

而且此時比值 $\gamma = 3$。

因此, 我們可以說, Barbeau 的問題 1 其實被反覆解決了。不過事實上, 這些作者中, 只有 Vincenzi–Paolillo–Rizzo 以及筆者提及 Barbeau 的文獻。值得注意的是, 這些作者除了 Robinson, 其他人都不是研究數論的。我們選三位介紹, 分別是 McMullen, Robinson 和蔡進一。

最引人注目的是 C. T. McMullen, 他是 1998 年 Fields 獎得主, 其研究領域是複動力系統、雙曲幾何與 Teichmüller 理論。他的得意弟子 Maryam Mirzakhani (1977～2017) 是首位女性 Fields 獎得主 (2014 年), 卻不幸英年早逝。

圖 4: 左: McMullen 在哈佛大學; 右: Maryam Mirzakhani 在家中畫 Riemann 面。

McMullen 在其論文 [25] 只是順帶給出了定理 1, 爲其主要結果服務的, 是以下結果:

定理 4 (McMullen, 2006)**.** 設正整數 n, k_1, k_2 滿足 $k_1 < k_2 \leqslant \frac{n}{2}$ 且 $\gcd(n, k_1, k_2) = 1$。則比值 $\dfrac{\sin\frac{k_2\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}}$ 爲二次無理數當且僅當 (n, k_2, k_1) 取值於下表第一列 (共 15 種可能), 而對應的比值與極小多項式分別由第二、三列給出:

(n,k_2,k_1)	$\dfrac{\sin\frac{k_2\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}}$	極小多項式
$(4,2,1)$	$\sqrt{2}$	$x^2-2=0$
$(5,2,1)$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\boldsymbol{x^2-x-1=0}$
$(6,3,2)$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$x^2-\dfrac{4}{3}=0$
$(6,2,1)$	$\sqrt{3}$	$x^2-3=0$
$(8,3,1)$	$1+\sqrt{2}$	$\boldsymbol{x^2-2x-1=0}$
$(10,5,3)$	$-1+\sqrt{5}$	$x^2+2x-4=0$
$(10,5,1)$	$1+\sqrt{5}$	$x^2-2x-4=0$
$(10,3,1)$	$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$	$x^2-3x+1=0$

(n,k_2,k_1)	$\dfrac{\sin\frac{k_2\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}}$	極小多項式
$(12,5,3)$	$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$	$x^2-x-\dfrac{1}{2}=0$
$(12,5,1)$	$2+\sqrt{3}$	$x^2-4x+1=0$
$(12,4,3)$	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$x^2-\dfrac{3}{2}=0$
$(12,3,2)$	$\sqrt{2}$	$x^2-2=0$
$(12,3,1)$	$1+\sqrt{3}$	$x^2-2x-2=0$
$(30,9,5)$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\boldsymbol{x^2-x-1=0}$
$(30,5,3)$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\boldsymbol{x^2-x-1=0}$

此定理中提到了“二次無理數”的概念, 我們略作解釋。設 α 是一個複數, 若它滿足 $f(\alpha)=0$, 其中 $f(x)$是一個二次有理係數多項式, 且 $f(x)$ 在有理數範圍內不可約。例如, $\alpha=\sqrt{2}$ 就是一個二次無理數, 它滿足二次不可約有理方程爲 $x^2-2=0$。類似地, 虛數單位 $i=\sqrt{-1}$ 也是一個二次無理數。一般地, 根據二次方程的求根公式可知, 一個二次無理數 α 恰好具有形式 $\alpha=r_1+r_2\sqrt{D}$, 其中 D是一個整數且不是完全平方數, r_1,r_2 是有理數且 $r_2\neq 0$。

由定理 4 (見上表中第三列中黑體突出的 4 行) 立即可以得到 Perez-Giz [27] 在 2018 年的一期 PBS Infinite Series 中提出的一個趣味問題的答案, 即下述:

定理 5. 設 k 是正整數, 則 $\phi_k=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ 可以實現爲某個正多邊形的兩條廣義對角線之比當且僅當 $k=1$ 或 $k=2$。

$k=1$ 對應於黃金比 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (golden ratio), 如前所述, 它可以在正五邊形中實現。$k=2$ 對應的比例 $1+\sqrt{2}$ 稱爲白銀比 (silver ratio), 可以在正八邊形中實現。

2008 年, Martin Möller 進一步推廣了 McMullen 的工作 (並在 2018 年國際數學家大會的報告中提及定理 4), 他們所引用的相關文獻是 Mann [24]。H. B. Mann 最著名的一個工作, 是 1942 年證明的堆壘數論中關於密率的 $\alpha+\beta$ 猜想。在陳省身先生 1948 年的文章《最近五年來數學研究的若干進展》中列舉的九項工作 (如王元院士 [36] 注意到的, 其中有四項屬於數論) 中, 這項成就位列第一。

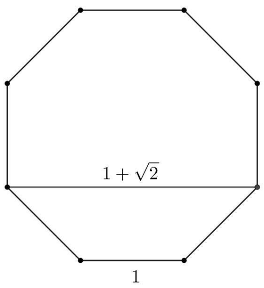


圖 5: 正八邊形中的白銀比例: $1+\sqrt{2}$。

接下來我們介紹 Raphael Robinson (1911∼1995)。估計大多數人都沒聽說過這位 Raphael Robinson, 但一定聽過他夫人的大名: Julia Robinson (1919∼1985), 參見陳關榮老師的文章 [9]。

Julia 因在 Hilbert 第十問題方面的工作而著名, 是當選美國科學院院士的首位女數學家 (1975 年), 也是擔任美國數學會主席的首位女性。Julia 的姐姐是 C. Reid, 著名的數學家傳記《希爾伯特》、《庫朗》、《奈曼》的作者。據 Reid 講, 正是她妹夫 Raphael Robinson 1952 年與 D. H. Lehmer 等合作、用電腦程式設計測試梅森數的質性而發現新的梅森質數這一激動人心的消息, 開啟了她的寫作生涯。Julia 事實上是 Raphael 在加州大學柏克萊分校數論班上

圖 6: 左: Raphael Robinson; 右: Julia Robinson。

的學生。受限於筆者學識, Robinson 在數論領域的工作我們瞭解甚少。[28] 發表在《美國數學月刊》的問題解答專欄, 也許是他生前發表的最後一篇文章, 編輯讚賞它是"一篇優美的短文"。

最後, 我們來介紹一下蔡進一等人的工作。蔡進一教授 (現在美國威斯康辛大學麥迪遜分校) 及其合作者 (包括付治國, 現在東北師範大學) 是在理論電腦領域, 他們在做計數問題計算複雜性分類時遇到這個問題。據付治國教授講, 他們經常要考慮矩陣特徵值是不是單位根的問題, 而在其文章中就需要一個整性獨立條件。估計正是這個需求, 導致數論出身的數學家 K. Girstmair 加入蔡進一等人的合作。雖然其合作論文 [7] 中給出的證明過於複雜, 但介紹了更一般的線性無關問題, 對於熱衷數論的朋友, 倒是值得瞭解。例如, 其中一個著名的公開問題, 是 Chowla–Milnor 猜想。它是由當代著名數學家 J. Milnor 在 1983 年 [26] 提出的。也許你會覺得奇怪, 以幾何拓樸工作聞名的 Milnor, 何以會提出一個關於數論的猜想? 這也許僅僅是"數學只有一個連通分支"的強有力的證據。順便說一句, 據數學家、慈善家 J. Simons 講, 他當初之所以離開數學下海經商, 一個原因就是一個數論難題挫敗了他: 他想證明源自幾何上的一個數是無理數。這個具體問題稱爲 Rational Simplex Conjecture, 可參見 [8], 並且最近

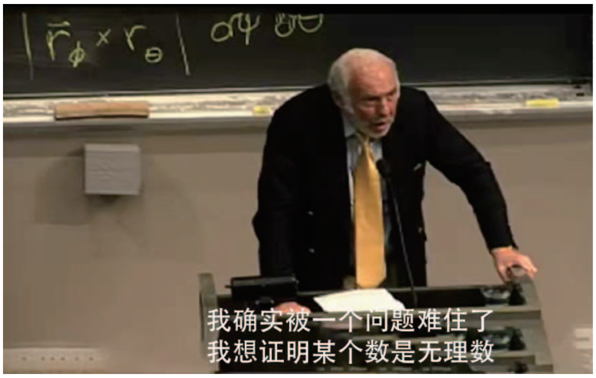


圖 7: 左: 蔡進一; 右: Simons 在演講 (https://mp.weixin.qq.com/s/YZFi4aNr_mShfxRKUL0bcw)。

又被 Cheeger [6] 再次提起。

筆者之所以會考慮問題 1, 純屬巧合。2020 年秋季學期, 爲本校 2020 級數學系新生準備“新生研討課”時, 筆者 (獨立於 Barbeau) 偶然想到問題 1 (這與我在數學史方面的興趣密不可分)。原本是作爲如何推廣問題的例子, 在第一堂課分享給大一新生, 旨在啟發學生積極思考、主動提問。兩個月以後, 筆者一時興起, 撿起這個問題, 開展研究。在師友的指導激勵下, 最終解決了這一問題。後來進一步查閱文獻, 才瞭解到這一結果 (定理 1) 不是新的, 而且與之等價的結果(定理 2, 定理 3) 也多次出現。當時筆者偶然得知, 中國科學技術大學 (這是華羅庚、王元曾經工作過的地方) 數學院學生雜誌《蛙鳴》復刊, 於是將這一成果寫成綜述投稿 [20]。筆者在 [21, 22] 中進一步求出了比值 (1) 在有理數域上的次數與極小多項式。

筆者斗膽揣測, 王元院士在九泉之下會樂於瞭解這個故事, 因爲它的背景跟數值積分的華羅庚–王元方法一樣, 都是分圓域(單位根在有理數域上生成的域), 最終都可以追溯至“數學王子”Gauss。正如華–王方法是基於以下觀察:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = \text{五等分單位圓形成的實分圓域的單位,} \tag{2}$$

本文整個故事的出發點也源於一個類似的等式:

$$\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{2\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \text{正四邊形的}\frac{\text{對角線長}}{\text{邊長。}} \tag{3}$$

圖 8: 華羅庚與王元, 引自中國科學院院士文庫網頁

幾年前, 筆者有幸拜訪王元院士。在談論其工作時, 他主要提了三個所謂“代表作” (都是他 30 歲之前做出的), 分別是哥德巴赫猜想、最小原根以及與華羅庚合作的積分近似計算。王元院士特別強調, 從黃金分割數到分圓域 (見上面的 (2) 式), 是華老的“高人之處”。

華羅庚對與王元的這一合作想必是極滿意的。他以數論的工作在國際數學舞臺展露頭角, 訪問英國 G. H. Hardy 與蘇聯 I. M. Vinogradov, 尤其是訪問美國普林斯頓高等研究院之

後, 經大師 H. Weyl (《典型群》 是其代表作之一) 指點, 主攻多複變調和分析領域 (“典型域”)。華羅庚回國後, 在數論領域主要是帶學生、寫教材, 這就引出了中國數學家 (王元、潘承洞、陳景潤等) 在哥德巴赫猜想方面的矚目成就。他與王元合作的數值積分工作 [13] (1959～1978, 其間有中斷), 可以說是爲他的數論研究劃上了一個圓滿的句號。

1978 年, 作爲全國中學數學競賽委員會主任, 華羅庚在賽後爲科學普及出版社出版的《全國中學數學競賽題解》 寫了前言 (收入 [15]), 分享了部分試題的背景。其中第二試第 2 題第 (1) 問, 就涉及分圓多項式在有理數域上的不可約性。筆者斗膽猜測, 這個題目的命題者極可能就是華羅庚本人。

順便提一句, 上世紀 50 年代, 作爲《數學通報》 兩位總編輯 (另一位是數學教育家傅種孫) 之一, 華羅庚主持“數學問題及解答欄” 近十年, 吸引並激勵了一大批青少年數學愛好者(如後來成爲華羅庚學生的許以超、馮克勤等, 參見 [33, 38])。《數學通報》 編委會還據此編輯了一本《中等數學習題解答集》, 1960 年由科學技術出版社出版。華羅庚的許多學生都曾爲該欄目供稿, 比如王元和以“汀汲湘”爲筆名的曾肯成 (感謝李克正教授指出這一點)。下面兩個題目就來自王元, 可以看出, 它們的背景也是分圓域, 極可能與當時的數值積分研究有關。

420. 求証

$$\sin nx = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right),$$

并由此推出

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=n.$$

1959 年 11 月 号 問 題

426. 設 p 为大于 3 的素数, $r=\frac{p-3}{2}$. 求証

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1, & 2\cos\frac{2\pi}{p}, & 2\cos\frac{4\pi}{p}, & \cdots, & 2\cos\frac{2r\pi}{p} \\ 1, & 2\cos\frac{4\pi}{p}, & 2\cos\frac{8\pi}{p}, & \cdots, & 2\cos\frac{4r\pi}{p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & 2\cos\frac{2(r+1)\pi}{p}, & 2\cos\frac{4(r+1)\pi}{p}, & \cdots, & 2\cos\frac{2r(r+1)\pi}{p} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}p^{\frac{r}{2}}$$

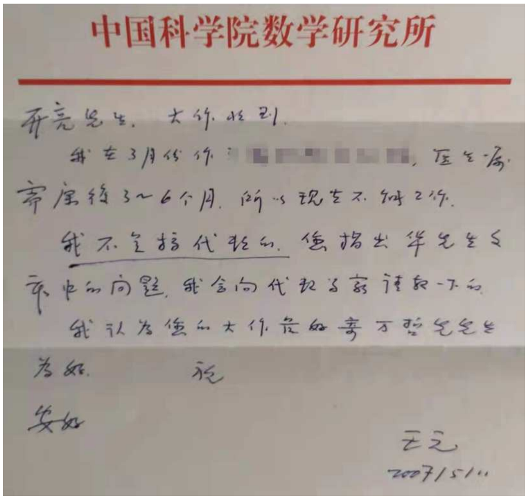
(王元提)

圖 9: 中國數學會期刊 《數學通報》1959 年第 9 期和第 11 期, 數學問題及解答欄的兩個題目。

後記

最後, 我想略談一下與元老的個人交往。當我還是天津大學的本科生時, 曾經給元老寫過一封班門弄斧的信, 指出華羅庚先生矩陣幾何文章中的一個錯誤並介紹了我的補救 (該工作後來正式發表, 見 [18] 或 [19] 3.5 節定理 11)。令我意外的是, 很快得到了元老的回覆。

等我下一次跟元老聯繫, 是 2018 年想調動工作時, 我委託當時在中國科學院數學與系統科學研究院做博士後的劉鵬同學, 請元老給我寫封推薦信。之前元老在接受張英伯等老師的訪談時, 曾表揚過《數學文化》 的三個作者, 其中有我。2017 年, 《數學文化》 發表了張英伯老師的訪談 《元老一席談》[37], 對我是一個極大的肯定與鼓勵。因此 2018 年我才有此想法。元老得知這一消息, 也是極力推動。劉鵬告訴我, 元老立即答應了, 並且先擬了一個初稿, 請他看看


中国科学院数学研究所

开亮先生, 大作收到.
我在3月份作 [illegible], 医生嘱
常需休3~6个月, 所以现在不能工作.
我不宜替代转给. 您指出华先生文
章中的问题, 我会向代权名家请教一下的.
我认为您的大作 [illegible]
为好. 祝
安好
王元
2007/5/11

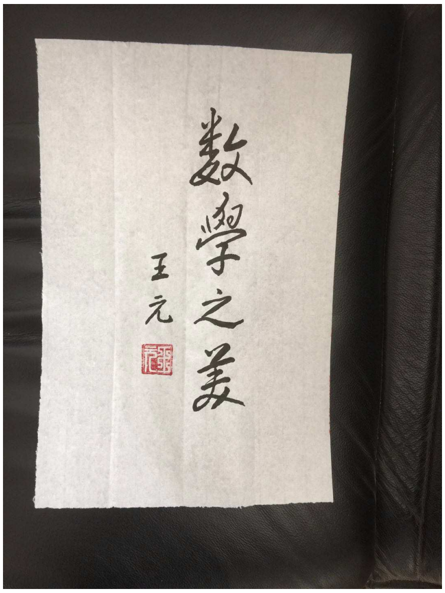


圖 10: 左: 元老2007年給我的回信(首行涉及病情隱私處被隱去)。右: 元老2019年的題字

是否合適, 待劉鵬確認以後, 再工工整整地謄寫了一遍。這封推薦信, 現存華東師範大學數學科學學院。由於各種原因, 最後我未調離。

我第一次見元老, 是 2019 年, 當時我在清華大學高等研究院短期訪問。其間拜訪過元老幾次。元老開門見山, 說你來見我, 我還是願意跟你談的, 因爲你寫作的態度認真。他既表揚了我在數學史方面的工作, 也提醒我下筆要慎重。他給我指出一處冒進的說法, 又指出另一處徵引的說法欠缺史料支撐, 並指引可以查閱的具體文獻。他跟我談到他本人的工作和退休後的生活。談到他的工作時, 他非常謙虛, 他再三強調"要緊的是, 身後留下多少東西"。我當時跟他還合了影, 遺憾的是手機壞了沒存底。我也請他寫過一幅字, "數學之美", 留著作爲應承給北京大學出版社的一本科普書的題字。

當時我往返清華與中國科學院, 差一點促成楊振寧先生與元老的一次相聚, 遺憾的是, 楊先生臨時身體不適, 取消了。我估計元老那裡還有給楊先生寫的字。他對楊先生非常尊重。我記得我去見元老時, 楊先生讓我捎話"替我問王元好"。當我轉達楊先生的問候時, 元老儼然化身爲一個畢恭畢敬的後輩, 忙說"不敢不敢, 應該是我要先主動問候他。" 就跟我2012年第一次見楊先生一樣, 元老跟我第一次見面, 就把他手頭的代表作都送我了, 其中就有《華羅庚》的英譯本。回想 20 多年前, 正是在南開大學陳省身數學所第一次讀到元老和他與楊德莊合著的《華羅庚的數學生涯》, 讓我逐漸瞭解華羅庚先生的工作, 最終引出了我的學士、碩士、博士的學位論文, 引出了我的數學普及傳播之路 (我的第一篇科普文章 [17], 發表於本刊, 就是我的學士學位論文的延伸)。兜兜轉轉, 又回到原點, 圓滿。

2020 年底, 當我解決本文所介紹的問題1時, 曾猶豫要不要把初稿轉呈給元老看, 因爲這

是數論, 而且跟分圓域關係密切。很快我就否定了: 不要麻煩他老人家了。聽說數學家過世後都往生極樂世界, 願他在天之靈會喜歡聽我講的故事。

圖 11: 王元《華羅庚》中、英文兩種版本。

致謝

本文基於作者在湘潭大學、北京師範大學、湖南大學所作的同名報告 [23] 以及在中科大學生數學雜誌《蛙鳴》期刊發表的文章 [20, 21, 22]。感謝加州大學柏克萊分校林節玄教授、湘潭大學易年余教授、北京師範大學李建華教授對初稿提出寶貴意見, 感謝首都師範大學李克正教授、山東大學李良攀教授、東北師範大學付治國教授、學友吳帆老師對作者的指點與鼓勵! 感謝國防科技大學張京同學和西北農林科技大學劉洋同學幫忙製作圖片。感謝審稿老師對初稿提出寶貴意見。

參考文獻

1. M. Aigner and G. M. Ziegler, *Proofs from the Book*. Sixth Edition. Springer, 2018。有中譯本,《數學天書中的證明》(第6版), 馮榮權、宋春偉、宗傳明、李璐譯, 北京: 高等教育出版社, 2022。
2. E. J. Barbeau, Incommensurability proof: a pattern that peters out. *Math. Mag.*, 56 (1983), 82-90.
3. A. Berger, More grade school triangles. *Amer. Math. Monthly*, 124 (2017), 324-336.
4. A. Berger, On linear independence of trigonometric numbers. *Carpathian Journal of Mathematics*, 34 (2018), 157-166.
5. B. Bollobás, To prove and conjecture: Paul Erdős and his mathematics. *Amer. Math. Monthly*, 105 (1998), 209-237.
6. R. Bryant, J. Cheeger, and P. Griffiths, Isadore M. Singer (1924–2021) In Memoriam Part 1: Scientific Works, *Notices of the American Mathematical Society*, Volume 69

(2022), Number 9, 1547-1563.
7. J. Y. Cai, Z. G. Fu, K. Girstmair and M. Kowalczyk, A complexity trichotomy for k-regular asymmetric spin systems using number theory. Innovations in Theoretical Computer Science (2018) 2:1–2:22.
8. J. Cheeger and J. Simons, Differential characters and geometric invariants, pp. 50-80 in Geometry and Topology (College Park, MD, 1983-1984). Edited by J. Alexander and J. Harer. Lecture Notes in Mathematics 1167. Springer (Berlin), 1985.
9. 陳關榮。朱麗亞·羅賓遜: 她的真正身份是一名數學家, 華院計算, 2022-03-28。也收入陳關榮《燦爛群星: 我心中的傑出科學家》, 北京: 科學出版社, 2025。
10. R. J. Evans and I. M. Isaacs, Fields generated by linear combinations of roots of unity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 229 (1977), 249-258.
11. R. Evans and I. M. Isaacs, Problem E 2668: Special non-isosceles triangle. *Amer. Math. Monthly*, 85 (1978), 825.
12. G. H. Hardy, A Mathematician's Apology. 有中譯本,《一個數學家的辯白》, 李文林、戴宗鐸、高嶸譯, 大連: 大連理工大學出版社, 2014 年。
13. 華羅庚, 王元。《數論在近似分析中的應用》, 北京: 科學出版社, 1978 年。
14. 華羅庚, 王元。《數學模型選談》, 大連: 大連理工大學出版社, 2011 年。
15. 華羅庚。《大哉數學之爲用: 華羅庚科普著作選集》, 上海: 上海教育出版社, 2018 年。
16. M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. 有中譯本,《古今數學思想》(第一冊), 張理京等譯, 上海: 上海科學技術出版社, 2014 年。
17. 林開亮。Hua 引理及其應用。數學傳播季刊, 34 (3), 39-48, 2010。
18. K. L. Lin, Hurwitz–Radon's symplectic analogy and Hua's cyclic recurrence relation, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 26 (2013), 858-872.
19. 林開亮。華羅庚關於矩陣標準型工作的介紹。數學傳播季刊, 39 (1), 66-96, 2015。
20. 林開亮。從正多邊形中的有理比到 $\tan\frac{\pi}{n}$ 的極小多項式。《蛙鳴》, 第 64 期 (2021 年 6 月), 52-78。補充與更正。
21. 林開亮。有理角三角函數比值的次數與極小多項式。懸賞征解,《蛙鳴》, 第 64 期 補充與更正。
22. 林開亮。有理角餘弦比值的次數。《蛙鳴》(中科大數學院院刊), 第 67 期, 2025 年 7月, 39-49。
23. 林開亮。從$\sqrt{2}$是無理數引出的一個數論研究與普及故事— 元老逝世一周年紀念,《數學通報》, 2022 (4), 1-4。
24. H. B. Mann, On linear relations between roots of unity, *Mathematika*, 12 (1965), 107-117.
25. C. T. McMullen, Teichmüller curves in genus two: torsion divisors and ratios of sines. *Invent. Math.*, 165(3) (2006), 651-672.
26. J. Milnor, On polylogarithms, Hurwitz zeta functions, and their Kubert identities, *Enseignement Math.* (2), 29 (1983), 281-322.
27. G. Perez-Giz, Beyond the golden ratio. PBS Infinite Series, Youtube Channel, 2018.
28. R. M. Robinson and J. H. Lindsey II, Problem 10550: Rational cosine ratios, *Amer. Math. Monthly*, 105 (1998), 277.
29. B. Schechter, My Brain is Open: The Mathematical Journeys of Paul Erdős. 有中譯本,《我的大腦敞開了: 愛多士的數學之旅》, 王元、李文林譯, 上海: 上海譯文出版社, 2016。
30. D. B. Shapiro, A periodicity problem in plane geometry. *Amer. Math. Monthly*, 91 (1984), 97-108。有中譯文, 吳傳喜譯, 平面幾何中的一個週期性問題, 收入《等周問題與夫婦入座

問題》pp. 60–81, 丁石孫主編“數學小叢書— 智慧之花”第一輯, 北京: 北京大學出版社, 1990。
31. G. Vincenzi, A characterization of regular n-gons whose pairs of diagonals are either congruent or incommensurable. *Arch. Math.*, 115 (2020), 467-477.
32. G. Vincenzi, B. Paolillo and P. Rizzo, Commensurable diagonals in regular n-gons. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53 (2022), 2831-2836.
33. 王濤, 付曉青。馮克勤訪談錄,《數學文化》, 第 12 卷第 1 期 (2021年), 18-53。
34. 王元。《華羅庚》(修訂版), 南昌: 江西教育出版社, 1999 年。
35. 王元, 楊德莊。《華羅庚的數學生涯》。北京: 科學出版社, 2000。
36. 王元。《陳省身文集》讀後感,《數學通報》, 2002 年第 12 期, 1-2。
37. 張英伯。元老一席談,《數學文化》, 第 8 卷第 1 期 (2017年), 32-41。
38. 曾匯。我的數學生涯— 許以超研究員訪談錄,《科學文化評論》, 第 17 卷第 3 期 (2020), 95-106。

—本文作者任教西北農林科技大學理學院—